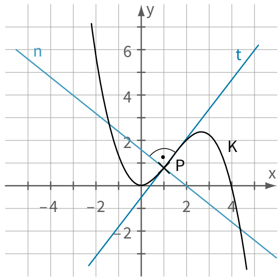
1.3 Tangente und Normale

Wissen

Die **Tangente t** im Punkt $P\left(a \mid f(a)\right)$ des Schaubilds K einer Funktion f ist die Gerade durch P mit der Steigung $m_t = f'(a)$. Die **Normale n** im Punkt $P\left(a \mid f(a)\right)$ des Schaubilds K einer Funktion f ist die Gerade durch P mit der Steigung $m_n = -\frac{1}{f'(a)}$.



Bei den Aufgaben ist zu unterscheiden, ob die Tangente in einem gegebenen Kurvenpunkt P zu bestimmen oder die Tangente von einem außerhalb liegenden Punkt Q an die Kurve zu legen ist.

Den Punkt P nennt man **Berührpunkt**.

Oft nützlich sind die **allgemeine Tangentengleichung** $t: y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ und die **allgemeine Normalengleichung** $n: y = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a)$.

1. Bestimmen Sie die Gleichungen von Tangente t und Normale n im Punkt $P\left(a \mid f(a)\right)$ des Schaubildes der Funktion f mit

A

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2,\ x \in \mathbb{R};\ P\left(-1 \mid f(-1)\right)$

b) $f(x) = \frac{1}{2x},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\};\ P\left(1 \mid f(1)\right)$

c) $f(x) = x + e^{-x},\ x \in \mathbb{R};\ P\left(2 \mid f(2)\right)$

d) $f(x) = x^3 - x^2 + 5,\ x \in \mathbb{R};\ P\left(-2 \mid f(-2)\right)$

1. a) $f'(x) = x,\ f(-1) = \frac{1}{2},\ m_t = f'(-1) = -1,\ m_n = 1$

L

Die allgemeine Tangentengleichung liefert: $t: y = -1(x+1) + \frac{1}{2}$ oder

$t: y = -x - \frac{1}{2}$.

Entsprechend erhält man $n: y = 1\,(x+1) + \frac{1}{2}$ oder $n: y = x + \frac{3}{2}$.

b) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2},\ f(1) = \frac{1}{2},\ m_t = f'(1) = -\frac{1}{2},\ m_n = 2$

$t: y = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$ oder $t: y = -\frac{1}{2}x + 1$; $n: y = 2\,(x-1) + \frac{1}{2}$ oder $n: y = 2x - \frac{3}{2}$

c) $f'(x) = 1 - e^{-x},\ f(2) = 2 + \frac{1}{e^2},\ m_t = f'(2) = 1 - \frac{1}{e^2};\ m_n = \frac{-1}{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{-1}{\frac{e^2-1}{e^2}} = \frac{-e^2}{e^2 - 1} = \frac{e^2}{1 - e^2}$

$t: y = \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)(x-2) + 2 + \frac{1}{e^2}$ oder $t: y = \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)x + \frac{3}{e^2}$ oder näherungsweise

$t: y = 0{,}865\,x + 0{,}406$

$n: y = \frac{e^2}{1-e^2}(x-2) + 2 + \frac{1}{e^2}$ oder $n: y = \frac{e^2}{1-e^2}x + \frac{2e^2}{e^2-1} + 2 + \frac{1}{e^2}$ oder näherungsweise n:
$y = -1{,}157\,x + 4{,}448$

d) $f'(x) = 3x^2 - 2x,\ f(-2) = -7,\ m_t = f'(-2) = 16,\ m_n = -\frac{1}{16}$;

$t: y = 16x + 25,\ n: y = -\frac{1}{16}x - \frac{57}{8}$

A

2. Legen Sie vom Punkt Q die Tangente an das Schaubild von f. Geben Sie den Berührpunkt P an, wenn

a) $f(x)=\frac{1}{6}x^3,\ x\in\mathbb{R};\ Q(0\,|\,-9)$

b) $f(x)=-\frac{2}{(x-2)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\};\ Q(2\,|\,-6)$

c) $f(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R};\ Q(-1\,|\,-e-1)$

L

2. a) $f(x)=\frac{1}{6}x^3,\ f'(x)=\frac{1}{2}x^2,\ P\left(a\,|\,f(a)\right)$

Mit der allgemeinen Tangentengleichung

$t: y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$

erhält man $t: y=\frac{1}{2}a^2(x-a)+\frac{1}{6}a^3$.

Die Punktprobe mit $Q(0\,|\,-9)$ liefert:

$-9=\frac{1}{2}a^2(0-a)+\frac{1}{6}a^3 \Leftrightarrow -9=-\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{6}a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a^3=9$

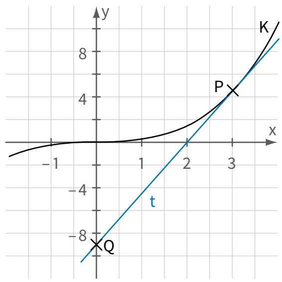
$\Leftrightarrow a^3=27 \Leftrightarrow a=3$

Wegen $f(3)=\frac{9}{2}$ ist $P\left(3\,\middle|\,\frac{9}{2}\right)$ der Berührpunkt.

Mit $f'(3)=\frac{9}{2}$ ergibt sich die Tangentengleichung

$t: y-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}(x-3)$ oder $t: y=\frac{9}{2}x-9$.

Skizze



b) $f'(x)=\frac{4}{(x-2)^3},\ P\left(a\,|\,f(a)\right);\ t: y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$

Einsetzen und Punktprobe mit $Q(2\,|\,-6)$ liefert unter Berücksichtigung von $a\neq 2$:

$-6=\frac{4}{(a-2)^3}(2-a)-\frac{2}{(a-2)^2} \Leftrightarrow -6=-\frac{4}{(a-2)^2}-\frac{2}{(a-2)^2}$

$\Leftrightarrow 6=\frac{6}{(a-2)^2} \Leftrightarrow (a-2)^2=1 \Leftrightarrow a^2-4a+3=0$

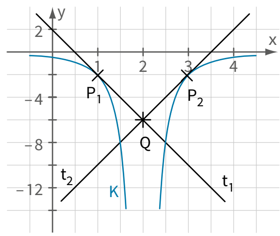
$a_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm 1$

$a_1=1,\ a_2=3,\ f(1)=-2,\ f(3)=-2$

Also sind $P_1(1\,|\,-2)$ und $P_2(3\,|\,-2)$ die Berührpunkte.

Durch Einsetzen von $f(1)=-2$ und $f'(1)=-4$ in die allgemeine Tangentengleichung erhält man die Tangenten $t_1: y=-4x+2$ und entsprechend $t_2: y=4x-14$.

Skizze



c) $f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ P\left(a\,|\,f(a)\right)$

$t: y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Die Punktprobe mit $Q(-1\,|\,-e-1)$ liefert:

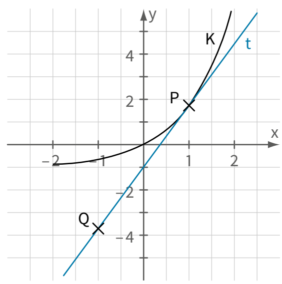
$-e-1=e^a(-1-a)+e^a-1 \Leftrightarrow a\,e^a=e$

Man sieht sofort die Lösung $a=1$.

Wegen $f(1)=e-1$ und der durchgehenden Linkskrümmung von K ist $P(1\,|\,e-1)$ der einzige Berührpunkt.

Mit $f'(1)=e$ ergibt sich die Tangente $t: y=e\,x-1$.

Skizze



3. Gegeben ist die Parabel K mit der Gleichung $y = (x-3)^2$. **A**

a) Zeigen Sie: Nur im Punkt P (2 | 1) ist die Normale eine Ursprungsgerade.
Geben Sie eine Gleichung dieser Normalen an.
In welchem Punkt P der Parabel ist die Normale eine Ursprungsgerade?

b) Die Normale aus Teilaufgabe a) bildet zusammen mit der Tangente in P und der y-Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das Dreieck um die y-Achse rotiert.

3. a) $f(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, $f'(x) = 2x - 6$, $P\left(a \mid f(a)\right)$ **L**

Die allgemeine Normalengleichung $n\colon y = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x-a) + f(a)$
und die Punktprobe mit O (0 | 0) liefern:

$0 = -\frac{1}{2a-6}(-a) + a^2 - 6a + 9 \Leftrightarrow 0 = a + (a^2 - 6a + 9)(2a - 6)$

$\Leftrightarrow 2a^3 - 18a^2 + 55a - 54 = 0$

Einsetzen von $a = 2$ ergibt die wahre Aussage $0 = 0$.

Mit Polynomdivision erhält man $(2a^3 - 18a^2 + 55a - 54) : (a-2) = a^2 - 14a + 27$.

Da die Gleichung $a^2 - 14a + 27 = 0$ nicht lösbar ist, erfüllt nur der Punkt P (2 | 1) die geforderte Eigenschaft und wegen $m_n = -\frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}$ ist $n\colon y = \frac{1}{2}x$ die Normale.

b) $t\colon y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$t\colon y = -2(x-2) + 1$ oder $t\colon y = -2x + 5$

Beim Dreieck misst die Grundseite 5 LE und die Höhe 2 LE.

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$

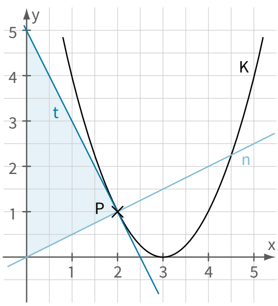
Der Flächeninhalt misst 5 FE.

Der Drehkörper ist ein Doppelkegel mit Grundkreisradius 2 und Höhe 1 bzw. 4.

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 1 + \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 4 = \frac{20}{3}\pi$

Das Volumen beträgt $\frac{20}{3}\pi$ VE.

Skizze



4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x-1)^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K. **A**

a) Zeichnen Sie K für $-2 \le x \le 4$.

b) Welche Punkte auf K haben den kleinsten Abstand zu Q (1 | 1)?

L

4. a) vgl. Abbildung

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3,\ f'(x) = 2x - 2$

$n\colon y = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a)$ und die Punktprobe mit

$Q(1\,|\,1)$ liefern: $1 = -\frac{1}{2a - 2} \cdot (1 - a) + a^2 - 2a - 3$

Für $a \neq 1$ folgt: $1 = \frac{1}{2} + a^2 - 2a - 3 \Leftrightarrow a^2 - 2a - \frac{7}{2} = 0$

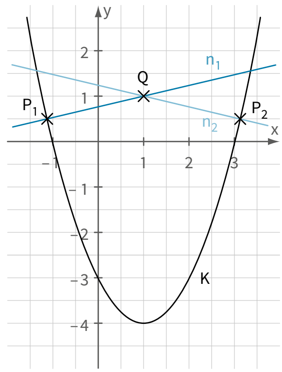
$a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{7}{2}} = 1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Aus Symmetriegründen ist $f\left(1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

Die Punkte $P_1\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right) \approx P_1\left(-1{,}12\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$ und

$P_2\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right) \approx P_2\left(3{,}12\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$ haben den kleinsten Abstand zu Q.

Schaubild



A

5. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x,\ x \in \mathbb{R}$.

In welchen Punkten des Schaubildes von f sind die Tangenten orthogonal zur Geraden $g\colon y = -\frac{1}{6}x$?

L

5. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x,\ f'(x) = x^2 - 3$

Aus $m_t = -\frac{1}{m_g} = 6$ ergibt sich der Ansatz:

$f'(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 6 \Leftrightarrow x = 3 \lor x = -3 \Rightarrow B_{1,2}(\pm 3\,|\,0)$.

A

6. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4x,\ x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Punkt P $(a\,|\,f(a))$ mit $0 < a < 3$, der von der ersten Winkelhalbierenden den größten Abstand besitzt. Wie groß ist dieser?

L

6. Im gesuchten Kurvenpunkt P muss die Tangente parallel zur ersten Winkelhalbierenden verlaufen.

Es ist $f'(x) = -2x + 4$.

Aus $f'(a) = 1 \Leftrightarrow -2a + 4 = 1 \Leftrightarrow a = 1{,}5$ und $f(1{,}5) = 3{,}75$ folgt $P(1{,}5\,|\,3{,}75)$.

Die Gleichung der Normalen im Punkt P des Schaubildes von f besitzt die Gleichung

$n\colon y = -\frac{1}{f'(1{,}5)} \cdot (x - 1{,}5) + f(1{,}5)$ oder $n\colon y = -x + 5{,}25$.

Der Ansatz für den Schnittpunkt S der Normalen mit der ersten Winkelhalbierenden liefert: $x = -x + 5{,}25$

$\Leftrightarrow x = 2{,}625 \Rightarrow S(2{,}625\,|\,2{,}625)$.

Den gesuchten Abstand d erhält man mit

$d(P;S) = \sqrt{(2{,}625 - 1{,}5)^2 + (2{,}625 - 3{,}75)^2} \approx 1{,}59$ LE.

Skizze